Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 05/06

9. Übung Lösungsskizzen

1. $126 = 5 \cdot 24 + \boxed{6}$

$24 = 4 \cdot 6 + 0$

also $ggT(126, 24) = 6$

$156 = 5 \cdot 27 + 21$

$27 = 1 \cdot 21 + 6$

$21 = 3 \cdot 6 + \boxed{3}$

$6 = 2 \cdot 3 + 0$

also $ggT(156, 27) = 3$

2. $116424 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11 = 14 \cdot 8316$

$\underline{274428 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 11^2} = 33 \cdot 8316$

$ggT(\text{"}, \text{"}) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 = 8316$

3. Eine Zahl ist durch 45 teilbar, wenn sie durch 5 und durch 9 teilbar ist.

durch 5: letzte Ziffer ist 0 oder 5

Nur 0en ⇒ nicht positiv

Also nur 5en

durch 9: Die Quersumme muss durch 9 teilbar sein.

Also muss die Zahl aus 9, 18, 27, ... 5en bestehen.

Die kleinste Zahl ist 555.555.555

4. Für x, y lautet die erste Zeile des EA:

$x = q_1 \cdot y + r_1$ oder $y = q_1' \cdot x + r_1'$.

Die Bedingung $y = 2x + 1$ ist die erste Zeile des EA.

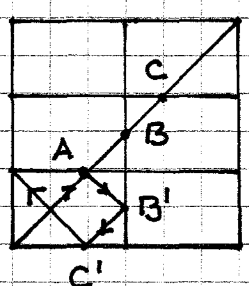
also $x = q_2 \cdot 1 + 0$

Also gilt $ggT(x, y) = 1$

HAUSÜBUNG

Idee für eine allgemeine Betrachtung: anstatt die Bahn zu reflektieren, wird der Billardtisch gespiegelt und die Bahn gerade fortgesetzt.

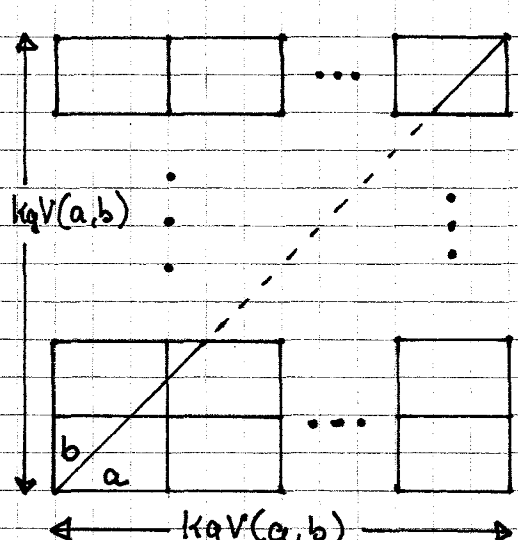
Beispiel:



Unten links ist der Tisch mit der reflektierten Bahn.

Nach rechts und oben wurden Tische angelegt. Die geradlinige Bahn mit den Schnittpunkten A, B und C entspricht der eigentlichen Bahn mit den Reflexionspunkten A', B' und C'.

Die Lösung des Problems besteht dann darin, aus dem Billardtischen ein Quadrat zu formen.



Das Quadrat hat dann die Kantenlänge kgV (a,b)

Gilt

$\text{kgV}(a,b) = k_a \cdot a$

$\text{kgV}(a,b) = k_b \cdot b$

dann wird $k_a - 1$ mal die Bande der Länge a und $k_b - 1$ mal die Bande der Länge b getroffen, also $k_a + k_b - 2$ Banden insgesamt.

6. Im Zweiersystem am Ende eine 0:
=> die gesuchte Zahl ist gerade

Ansatz im Vierersystem : $abcdef_4$
Die Zahl ist im Zweiersystem ~~zwölf~~ elfstellig
=> im Vierersystem sechsstellig (schnelle Umwandlung 2er -> 4er)
Quersumme im Vierersystem ist 11
=> $a+b+c+d+e+f=11$ (1)
16er-System (schnelle Umwandlung 4er -> 16er)

16^2	16	1
$4a+b$	$4c+d$	$4e+f$

3 Ziffern im 16er System

Quersumme im 16er-System ist 26
$(4a+b)+(4c+d)+(4e+f)=26$ (2)
alternierende QS im 16er-System ist 0
$(4a+b)-(4c+d)+(4e+f)=0$ (3)

(2) minus (3) liefert : $2\cdot(4c+d)=26 \Rightarrow 4c+d=13$
Da die Unbekannten Ziffern im Vierersystem sind, gilt $c,d\in\{0,1,2,3\}$. Dann ist $\underline{\underline{c=3}}$ und $\underline{\underline{d=1}}$ die einzige Lösung.

Einsetzen in (1) : $a+b+e+f=7$ (4)

(2) plus (3) liefert : $8a+2b+8e+2f=26 \quad |:2$

$4a+b+4e+f=13$ (5)

(5) minus (4) liefert: $3a+3e=6 \quad |:3$

$a+e=2$ (6)

eingesetzt in (4) $b+f=5$ (7)

(7) hat als Lösungsmöglichk. $b=2\ f=3$ oder $b=3\ f=2$
Da die Zahl gerade ist, muss $\underline{\underline{f=2}}$ sein. $\underline{\underline{b=3}}$

$a+e=2$ lässt die Lösungen zu:

$a=0\ e=2$, $a=1\ e=1$, $a=2\ e=0$

$a=0$ => Die Zahl ist im Vierersystem nur 5-stellig

=> Die Zahl ist im Zweiersystem nur 10-stellig ↯

$a=2$ => da a auf der 4^5 Stelle steht

$2\cdot 4^5 = 2\cdot 2^{10} = 1\cdot 2^{11}$

=> Die Zahl ist im Zweiersystem 12-stellig ↯

Also ist $\underline{a=1}$ $\underline{e=1}$ die Lösung.

Damit lautet die Zahl im Vierersystem

$$133112_4 = 1\cdot 4^5 + 3\cdot 4^4 + 3\cdot 4^3 + 1\cdot 4^2 + 1\cdot 4 + 2$$

$$= 2006_{10}$$

Die letzte Antwort war Ihnen sicher von Anfang an klar.